汕头大学 2021 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目代码：814

科目名称：高等代数

适用专业：数学

一 (20分). 解答如下问题:

(1) 已知多项式$f(x)=x^3+(2\mathrm{i}-1)x^2-3(\mathrm{i}+1)x-2(\mathrm{i}-1)$ 有实根, 求$f(x)$的全部根(i表示虚数单位).

(2) 求多项式$f(x)=x^{16}+x^8+1$在实数域上的因式分解.

(3) 证明: 对于任意正整数n, 多项式$f(x)=x^n+2$是有理数域上的不可约多项式.

二 (15分). 设有线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1, \\ x_1+\lambda x_2+x_3=2, \\ x_1+x_2+(\lambda-1)x_3=1. \end{cases}$ 讨论当λ为何值时, 该方程组有唯一解? 无解? 无穷多组解? 在无穷多组解时, 求其通解.

三 (10分). 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ 是一组线性无关的向量, 问$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\cdots,\alpha_{k-1}+\alpha_k,\alpha_k+\alpha_1$ 是否线性无关? 请证明结论.

四 (15分). 设$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, 求正交矩阵$T$，使得$T^{-1}AT$ 为对角阵.

五 (20分). 设A,B分别是$n\times m$ 和$m\times n$矩阵, I_k 表示k 阶单位矩阵.

(1) 证明：$\det(I_n-AB)=\det(I_m-BA)$, 其中$\det(C)$ 表示方阵C的行列式.

(2) 设

$$G=\begin{pmatrix} a_1a_1 & a_1a_2+1 & \cdots & a_1a_n+1 \\ a_2a_1+1 & a_2a_2 & \cdots & a_2a_n+1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_na_1+1 & a_na_2+1 & \cdots & a_na_n \end{pmatrix}$$

其中n 为偶数, $a_i=\begin{cases} 1, & i=1,2,\ldots,\frac{n}{2}, \\ 3, & i=\frac{n}{2}+1,\ldots,n, \end{cases}$ 求$\det(G)$.

(3) 设$F=\begin{pmatrix} g_{11}I_4 & g_{12}I_4 & \cdots & g_{1n}I_4 \\ g_{21}I_4 & g_{22}I_4 & \cdots & g_{2n}I_4 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{n1}I_4 & g_{n2}I_4 & \cdots & g_{nn}I_4 \end{pmatrix}$, 其中$g_{ij}$是第(2)小题中矩阵$G$ 的(i,j)元, I_4是4阶单位矩阵, 求$\det(F)$.

汕头大学 2021 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

六 (15分). 设$a_0 = 2$, $a_1 = 1$, 且当$n \geq 2$时, $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$. 求a_n.

七 (20分). 解答如下问题:

(1) 设 A 是 n 阶正交矩阵, 即$A^T A = AA^T = I_n$. 证明: 如果A是上三角阵, 则A为对角阵, 且对角元为1或-1.

(2) 设$H_n = I_n - 2uu^T$, 其中u是单位向量, 即$u^T u = 1$, 矩阵H_n 称为Householder矩阵. 证明: Householder矩阵是正交矩阵.

(3) 设H_n的定义如(2), 证明: $\det(H) = -1$.

(4) 设$x = (2, 2, 1)^T$, 求正交矩阵Q, 使得$Qx = 3(1, 0, 0)^T$.

八 (20分). 设A, B都是n阶实对称矩阵.

(1) 证明：如果A, B的特征值都是正实数, 则AB的特征值都是正实数.

(2) 证明：如果A, B的特征值都是非负实数, 则AB 的特征值都是非负实数.

九 (15分). 在n 维欧式空间$\mathbb{R}^n$中，向量α, β的内积记为(α, β). 设$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$为$\mathbb{R}^n$中的$k$个向量, 定义矩阵

$$A = \begin{pmatrix} (\alpha_1, \alpha_1) & (\alpha_1, \alpha_2) & \cdots & (\alpha_1, \alpha_k) \\ (\alpha_2, \alpha_1) & (\alpha_2, \alpha_2) & \cdots & (\alpha_2, \alpha_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\alpha_k, \alpha_1) & (\alpha_k, \alpha_2) & \cdots & (\alpha_k, \alpha_k) \end{pmatrix}.$$

(1) 证明: A为半正定矩阵.

(2) 证明: 若$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$线性无关, 则$A$为正定矩阵.